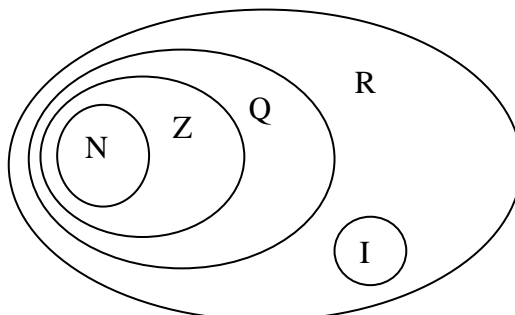


# TEMA 1

## EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

N= Números Naturales  
Z= Números Enteros  
Q= Números Racionales  
I= Números Irracionales  
R= Números Reales



### 1.1. Concepto de número racional

Cuando en una determinada situación se hace necesaria la partición de objetos (unidades), los números enteros se manifiestan insuficientes.

Así, para poder expresar la elección de las partes que se toman tras la partición de una unidad (objeto), se utiliza **la fracción de números enteros**.

**Una fracción de números enteros está compuesta por dos números enteros dispuestos de la forma siguiente:**

$$\frac{3}{4} \quad \begin{array}{l} \text{Numerador} \\ \text{Denominador} \end{array}$$

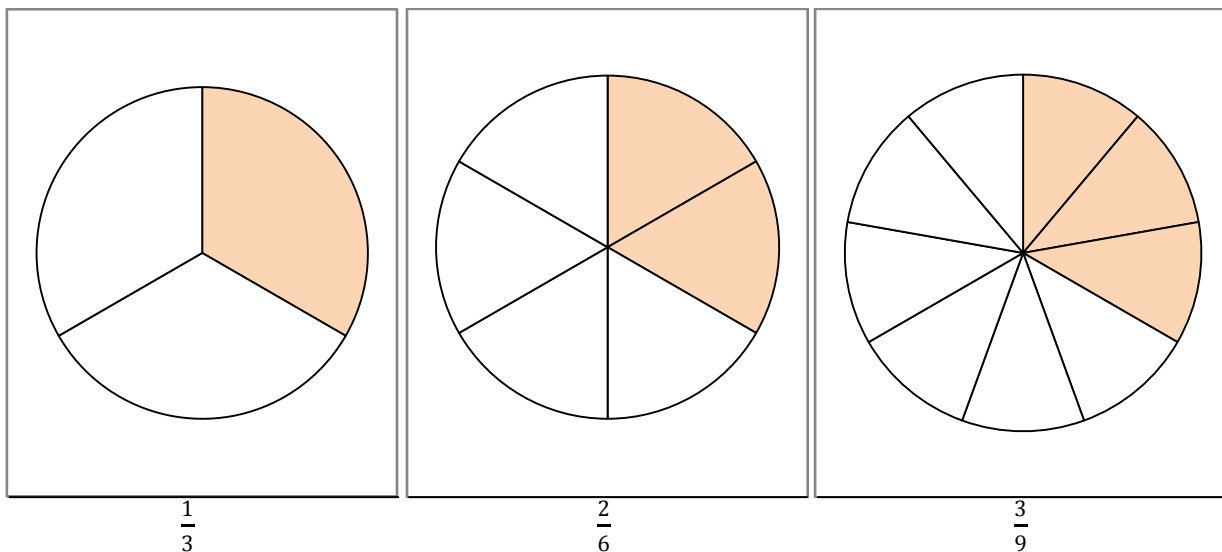
**El denominador sirve para indicar las partes en las que se divide la unidad.**

**El numerador establece las partes que se toman de dicha unidad.**

En nuestra fracción, estamos indicando que tomamos 3 partes de las 4 en las que se dividió el objeto y leemos *"tres cuartos"*.

Cuando dos fracciones representan la misma parte de un objeto se dice que son **equivalentes**.

Por ejemplo, si de tres tartas iguales tomamos las fracciones correspondientes a  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{6}$  y  $\frac{3}{9}$  respectivamente como indica el gráfico adjunto, estamos tomando la misma cantidad de tarta.



Se expresa que  $\frac{2}{6} = \frac{3}{9}$  y se observa que  $2 \cdot 9 = 6 \cdot 3$

**Dos fracciones son equivalentes cuando sus productos cruzados son iguales**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Se pueden obtener fracciones equivalentes a una dada multiplicando numerador y denominador por el mismo número (amplificación) o dividiendo numerador y denominador por el mismo número (simplificación):

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8} \quad (\text{amplificar})$$

$$\frac{6}{8} = \frac{6 : 2}{8 : 2} = \frac{3}{4} \quad (\text{simplificar})$$

Se llama **fracción irreducible** a la fracción más simplificada de una dada

Así,  $\frac{3}{4}$  es una fracción irreducible

Todas las fracciones equivalentes a una dada,

$$\left( \frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \dots \right)$$

reciben el nombre de número racional y nos referimos a él con la fracción irreducible:

$\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, -\frac{11}{4}$ , son números racionales distintos puesto que no son equivalentes

**El conjunto de todos los números racionales se denota con la letra Q**

Todo número entero  $n$ , del conjunto **Z** de los números enteros, también puede expresarse como una fracción  $n = \frac{n}{1}$ , por lo que también resulta ser un número racional.

**Los números racionales son por tanto una ampliación de los números enteros y lo expresamos de la siguiente forma:**

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  Significa: "El conjunto de los números enteros está contenido en el conjunto de los números racionales"

Para ordenar una serie de números racionales basta con reducirlos a común denominador y ordenarlos en función de los numeradores que resulten ya que estarían todos referidos a la misma partición.

### Autoevaluación

1.- Completa el término que falta en las siguientes equivalencias de fracciones:

$$a) \frac{5}{-6} = \frac{\quad}{18}$$

$$b) \frac{7}{\quad} = -\frac{28}{16}$$

2.- Determina la fracción irreducible de cada uno de los números siguientes:

$$a) \frac{120}{84}$$

$$b) \frac{315}{-270}$$

$$c) \frac{756}{1800}$$

## 1.2. Operaciones con números racionales

Las operaciones fundamentales en este conjunto son la suma y la multiplicación. La diferencia (o resta) y la división de fracciones son operaciones que dependen de las dos fundamentales.

### 1.2.1.- Suma de fracciones

Cuando las fracciones a sumar se refieren a la misma partición, se sumarán conservando el mismo denominador y sumando los numeradores correspondientes

$$\frac{2}{5} + \frac{9}{5} = \frac{2+9}{5} = \frac{11}{5}$$

En general 
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

Cuando las fracciones tienen distinto denominador, reducimos primero a común denominador, con la ayuda del **mínimo común múltiplo** de los denominadores, para así poder sumarlos como en el caso anterior:

**Ejemplo:**

$$\frac{7}{5} + \frac{4}{3} = \frac{21}{15} + \frac{20}{15} = \frac{21+20}{15} = \frac{41}{15}$$

En general 
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{m} + \frac{b'}{m} = \frac{a'+b'}{m}$$

con m.c.m. (b,d), 
$$\frac{a'}{m} = \frac{a}{b} \quad y \quad \frac{c'}{m} = \frac{c}{d}$$

### 1.2.2.- Resta de fracciones

#### Importante

Con la diferencia (o resta) de fracciones procedemos de la misma forma que lo hemos hecho con la suma:

$$\frac{4}{9} - \frac{5}{6} = \frac{8}{18} - \frac{15}{18} = \frac{8-15}{18} = \frac{-7}{18} = -\frac{7}{18}$$

Como puedes observar, no hay dos operaciones, solo una que se denomina *suma de fracciones*.

Cuando la operación lleve más de dos fracciones, con paréntesis y corchetes, se procede de la misma forma que acabamos de aprender y operando los paréntesis y corchetes de la misma forma que se hacía con los números enteros:

#### Ejemplo:

Opera y simplifica el resultado

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right) - \left[1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right] &= \left(\frac{9}{15} + \frac{5}{15}\right) - \left[1 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{20}\right] = \\ &= \frac{14}{15} - 1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{20} = \frac{56}{60} - \frac{60}{60} + \frac{15}{60} - \frac{40}{60} + \frac{9}{60} = -\frac{20}{60} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

### 1.2.3.- Producto de fracciones

¿Cuántos pasteles son las tres cuartas partes de dos docenas?

La respuesta es sencilla si dividimos los 24 pasteles en 4 partes iguales (cada una con 6 pasteles) y tomamos 3 de esas partes, contestando finalmente que dicha partición de las dos docenas son 18 pasteles.

Con números racionales esta operación se puede hacer así:

$$\frac{3}{4} \text{ de } 24 = \frac{3}{4} \cdot 24 = \frac{3 \cdot 24}{4} = \frac{72}{4} = 18$$

Se ha utilizado la operación denominada **multiplicación de fracciones**.

Para multiplicar dos fracciones, se multiplican entre sí los numeradores y los denominadores:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Por ejemplo

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

### 1.2.4.- División de fracciones

Para la **división de fracciones**, basta con multiplicar la primera por la fracción inversa de la segunda:

Ejemplo:

$$\frac{4}{5} : \frac{3}{2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

También puede decirse que para dividir fracciones basta con hacer los productos cruzados de sus numeradores y denominadores:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Cuando tengas que hacer cálculos combinados, con paréntesis y corchetes, debes tener en cuenta la jerarquía de las operaciones que conoces desde enseñanza primaria y las reglas de operación de los signos y hacerlos con tranquilidad para no equivocarte.

Ejemplo

El ejemplo siguientes ilustra cómo deben hacerse esos cálculos simplificando al máximo:

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{6} \cdot \left(\frac{2}{3} - 1\right) &= \left(\frac{6}{3} - \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{6} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{3}\right) = \frac{5}{3} + \frac{4}{6} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3} - \frac{4}{18} = \\ &= \frac{5}{3} - \frac{2}{9} = \frac{15}{9} - \frac{2}{9} = \frac{13}{9} \end{aligned}$$

Finalmente debes saber que las potencias de fracciones se hacen igual que las de números enteros, utilizando las mismas propiedades que en éstos y que recordamos a continuación.

### 1.2.5.- Propiedades de las potencias:

$$1) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{además} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

$$2) \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$$

$$3) \left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m} \quad \text{además} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$4) \left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$$

Para saber más sobre números racionales:

[Expresión decimal de una fracción:](#)

[http://descartes.cnice.mec.es/materiales\\_didacticos/Numeros\\_Reales\\_Aproximaciones/numeros2.htm](http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Numeros_Reales_Aproximaciones/numeros2.htm)

[Ejercicios y explicaciones sobre fracciones:](#)

[http://descartes.cnice.mec.es/materiales\\_didacticos/Numeros\\_Reales\\_Aproximaciones/indice.htm](http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Numeros_Reales_Aproximaciones/indice.htm)

[Decimales en la vida cotidiana](#)

<http://losdecimales.wikispaces.com/conozcamos+los+decimales+en+la+vida+cotidiana>

### Autoevaluación

1.- Realiza los siguientes cálculos con números racionales y selecciona la respuesta para comprobar que lo has hecho bien.

$$\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} + 2\right) - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{5} + 1\right) =$$

Opción A	Opción B	Opción C
-18/20	19/20	1

$$\frac{5}{4} - \left(\frac{3}{4} + 6\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{2}\right) =$$

Opción A	Opción B	Opción C
-2	37/8	39/8

$$\left(\frac{3}{2}\right)^6 : \left(\frac{3}{5}\right)^6 - \left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]^3 =$$

Opción A	Opción B	Opción C
2	-3	0

2.- Calcula y simplifica:

a)  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 3 =$

b)  $-\frac{8}{3} + \frac{3}{4} \left(-\frac{2}{5}\right) =$

c)  $1 - \frac{3}{5} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) =$

d)  $\frac{7}{4} - \left(\frac{5}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}\right) + 2 =$

e)  $\frac{10}{3} \cdot \frac{-4}{9} + \frac{7}{6} - \frac{2}{5} : \frac{-8}{15} =$

f)  $\left(5 - \frac{1}{3}\right)^2 - \left[\frac{5}{14} - 3 \cdot \left(\frac{-4}{7}\right)\right] =$

g)  $\frac{1}{10} : \frac{2}{16} - \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{6} - 5 : \frac{3}{2} =$

## 1.3.- POTENCIAS

Dado un número real  $a$  y un número entero  $n > 1$ , se define la potencia de base  $a$  y exponente  $n$ :

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \text{ ( n veces)}$$

$$\begin{cases} a \rightarrow \text{BASE} \\ n \rightarrow \text{EXPONENTE} \end{cases}$$

producto reiterado  $n$  veces del mismo factor  $a$

Las potencias de exponente entero positivo son una forma concisa y cómoda de manejar productos repetidos del mismo factor. Aparecen, por ejemplo, en la factorización de números:

$$1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

Cuando la **base** de la potencia es **positiva** ( $a > 0$ ), el **signo** de la potencia es **+**:  $4^5 = 1024$

Sin embargo, si la **base** es **negativa** ( $a < 0$ ), el signo de la potencia depende de la paridad del exponente:

$$a < 0 \text{ y } n \text{ par} \rightarrow \text{signo } + (-3)^4 = 81$$

$$a < 0 \text{ y } n \text{ impar} \rightarrow \text{signo } - (-3)^5 = -243$$

Esto se debe a que cuando hay un número par de factores, se pueden agrupar de 2 en 2 y así el producto final es positivo. Sin embargo, cuando hay un número impar de factores, siempre queda un factor negativo desaparejado, que es el que produce que el signo total sea negativo.

Es conveniente a efectos del cálculo definir potencias que tengan exponente entero y negativo:

Dado un número real  $a$  y un número entero  $-n \leq 0$ , se define la potencia de base  $a$  y exponente negativo  $-n$ :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a} \quad a^0 = 1$$

Una potencia de exponente negativo es el inverso de la misma potencia con exponente positivo

### 1.3.1.- Operaciones

Con la calculadora, podemos calcular el valor de cualquier potencia con las teclas  $x^y$  o bien  $\wedge$  para calcular  $6^7 \rightarrow 6 \wedge 7 = 279936$

Las reglas de cálculo con potencias son las mismas si el exponente es positivo, negativo o nulo. Sólo las operaciones de producto, cociente y potencia de una potencia tienen una fórmula aplicable en el cálculo con potencias. Las operaciones más sencillas de suma y resta no tienen ninguna fórmula manejable y en el caso de que haya que sumar o restar potencias, primero se calculan sus valores y después se suma o resta.

	Misma base	Mismo exponente
Producto	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
Cociente	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
Potencia	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	

Suponiendo que  $a, b \in \mathbb{R}$      $n, m \in \mathbb{Z}$

Para saber más:

[Sobre potencias y practicar interactivamente:](#)

[http://descartes.cnice.mec.es/materiales\\_didacticos/Potencias\\_mac/potencias2.htm](http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Potencias_mac/potencias2.htm)

## 1.4.- Raíces. Potencias de exponente fraccionario

Se define la raíz de índice  $n$  del número  $a$  como:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si} \quad b^n = a \quad \text{donde} \quad \begin{cases} n \rightarrow \text{índice del radical} \\ a \rightarrow \text{radicando} \\ b \rightarrow \text{raíz} \end{cases} \quad \checkmark$$

Al símbolo  $\sqrt{\quad}$  se le llama símbolo radical

La utilidad de las raíces es el poder despejar la **base desconocida** de una potencia conocida:

$$x^5 = 143 \Rightarrow x = \sqrt[5]{143} = 2.698156 \dots$$

Las raíces se comportan de forma distinta según sea el **índice par** o **impar**:

Índice par	Índice impar
<p>Las raíces de índice par sólo están definidas para radicandos positivos: <math>a \geq 0</math>. No tienen sentido</p> <p>raíces de índice par de números negativos.</p> <p><math>\sqrt[4]{-256}</math> no existe</p> <p>• Las raíces de <b>índice par</b>, cuando existen, son <b>dobles</b>, es decir, para cada valor <math>a \geq 0</math> hay <b>dos raíces opuestas</b>:</p> <p><math>\sqrt[4]{256} = \begin{cases} +4 \rightarrow 4^4 = 256 \\ -4 \rightarrow (-4)^4 = 256 \end{cases}</math></p>	<p>Las raíces de índice impar están definidas para todos los números reales, tanto positivos</p> <p>como negativos:</p> <p><math>\sqrt[3]{27} = 3 \quad \sqrt[3]{-27} = -3</math></p> <p>• Las raíces de <b>índice impar</b> son <b>únicas</b> y tienen <b>el mismo signo</b> que el radicando del que proceden:</p> <p><math>\sqrt[3]{56} &gt; 0 \quad \sqrt[3]{-45} &lt; 0</math></p>

### • Exponente fraccionario

Es muy conveniente a efectos del cálculo con raíces, transformarlas en potencias de exponente fraccionario:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$$

Esta última forma se deduce aplicando las propiedades de las potencias, en concreto, la potencia de una potencia:

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Con esta técnica, podemos deducir las reglas del cálculo con raíces a partir de las reglas del cálculo con potencias, convirtiendo previamente los radicales en potencias de exponente fraccionario:

	Mismo radicando	Mismo índice
Producto	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} = a^{\frac{m+n}{n}} =$ $= \sqrt[n \cdot m]{a^{n+m}}$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a \cdot b)}$
Cociente	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \dots = a^{\frac{m-n}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a^{m-n}}$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
Potencia	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	
Raíz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	

Las calculadoras científicas permiten calcular cualquier raíz, usando las teclas adecuadas. Normalmente son:  $x^{\frac{1}{y}}$  (que nos recuerda que una raíz no es más que una potencia de exponente fraccionario) o también  $\sqrt[x]{\quad}$ , dependiendo del tipo y modelo de calculadora en cuestión:

**Ejemplo:**

Calcular:

→  $\sqrt[6]{81} \quad x^{\frac{1}{y}} \quad 6 = 2,080083823..$

**Dos raíces son semejantes si tienen el mismo índice y el mismo radicando. Se pueden sumar o restar radicales semejantes sumando o restando los coeficientes que acompañen a cada raíz.**

Ejemplo:

$$3 \cdot \sqrt[3]{6} + 9 \cdot \sqrt[3]{6} - \frac{1}{5} \cdot \sqrt[3]{6} = \left(3 + 9 - \frac{1}{5}\right) \cdot \sqrt[3]{6} = \frac{59}{5} \cdot \sqrt[3]{6}$$

**Dos radicales son equivalentes cuando expresan la misma cantidad, es decir, son el mismo número.**

Ejemplo:

$$\sqrt[6]{3^4} = 3^{\frac{4}{6}} = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$$

Podemos asegurar que  $\sqrt[6]{3^4}$  y  $\sqrt[3]{3^2}$  son el mismo número; en efecto:

$$\sqrt[6]{3^4} = \sqrt[6]{81} = 2,080083823.. \quad \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9} = 2,080083823$$

El uso de los radicales como potencias de exponente fraccionario permite simplificar las raíces y trabajar con radicales equivalentes y más sencillos.

#### Para saber más sobre potencias y radicales

Potencia y radicación en el conjunto de los números enteros:

<http://www.educared.org/global/educared/>

Radicales: definición y operaciones:

<http://www.educared.org/global/educared/>

## AUTOEVALUACIÓN

1.- Calcula el valor de los radicales siguientes, transformando los radicandos en potencias:

$$\sqrt[3]{\frac{125}{216}}$$

Opción A	Opción B	Opción C
3/5	5/6	5/3

$$\sqrt[3]{-\frac{27}{343}}$$

Opción A	Opción B	Opción C
-3/5	3/6	-3/7

2.- Efectúa las siguientes operaciones y expresa el resultado lo más simplificado posible:

$$(\sqrt[3]{20} : \sqrt[3]{5}) \cdot \sqrt[3]{2}$$

Opción A	Opción B	Opción C
1/2	2	3/4

$$(a \cdot \sqrt[6]{a^2})^2 : \sqrt[3]{a}$$

Opción A	Opción B	Opción C
5/6	4/6	7/6

## 1.5.- Logaritmos

Dado  $a$  un número y  $N > 0$ , se define el logaritmo en base  $a$  del número  $N$  por:

$$\log_a N = b \text{ si } a^b = N$$

El logaritmo en base  $a$  de un número  $N$  es el exponente  $b$  al que hay que elevar la base  $a$  para obtener el número  $N$

La utilidad de los logaritmos es la de poder despejar el exponente desconocido de una potencia conocida:

$$\text{si } 5^x = 35 \text{ entonces } x = \log_5 35$$

es decir,  $x$  es el número al que hay que elevar **5** para obtener **35**

Existen tantos logaritmos como valores: para cada  $a$  existe el  $\log_a$ . Esto produce graves problemas, ya que deberíamos poder calcular infinitos tipos de logaritmos, uno para cada valor  $a$ . Afortunadamente, esto no es así. Hay dos logaritmos principales, que son los más usados y que aparecen en las calculadoras científicas: el **logaritmo decimal** o de **base 10** y el **logaritmo neperiano o natural**, de base el número  $e$ .

Se define el número  $e$ , base de los logaritmos neperianos o naturales, mediante el límite:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828 \dots$$

Así,  $\log_{10} = \text{Log}$  --> logaritmo decimal  $\log_e = \ln$  --> logaritmo neperiano

Los logaritmos tienen sus propiedades de cálculo, derivadas de las propias del cálculo con potencias.

Estas propiedades son:

$$1) \log_a a = 1$$

$$2) \log_a 1 = 0$$

$$3) \log_a a^x = x$$

$$4) \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$5) \log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$6) \log_a (b^c) = c \cdot \log_a b$$

- **Cambio de base.-**

Una de las propiedades más importantes de los logaritmos es poder calcular un logaritmo en una base  $a$  cualquiera utilizando logaritmos en otra base  $b$  distinta a la anterior. Esta propiedad nos va a permitir, por ejemplo, poder calcular  $\log_5 35$ , algo que todavía tenemos pendiente.

Se cumple que:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

En efecto:

sea  $x = \log_a N$  --> por definición de logaritmo:

$a^x = N$  --> tomando logaritmos (de base b) en ambos lados de la igualdad tenemos que:

$\log_b (a^x) = \log_b N$  ( por la propiedad 6 anterior se cumple que:

$x \cdot \log_b a = \log_b N$  y despejando:

$$x = \log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \text{ tal y como queríamos demostrar.}$$

Así, vamos por fin a poder calcular  $\log_5 35$ . Para ello, podemos usar indistintamente  $\log$  o  $\ln$ , ya que ambos aparecen en nuestras calculadoras científicas.

$$\log_5 35 = \frac{\ln 35}{\ln 5} = \frac{3.555348061}{1.609437912} = 2.209061955$$

Podemos comprobar la veracidad de tal afirmación, elevando 5 al número 2.209061955 y viendo si obtenemos 35:

$$5^{2.209061955} = 34.9999999999 \approx 35$$

(La pequeña diferencia se debe a errores inherentes al cálculo imposibles de evitar, ya que tanto  $\ln 35$  como  $\ln 5$  son números irracionales con infinitas cifras decimales y nosotros hemos tomado sólo 10 cifras. Hay que ser conscientes de esta imprecisión y tenerla presente en nuestros cálculos.)

#### **Para saber más sobre logaritmos y operaciones con logaritmos**

[Definición e historia de los logaritmos:](#)

<http://es.wikipedia.org/wiki/Logaritmo>

[Definición, propiedades y ejercicios de logaritmos:](#)

<http://platea.pntic.mec.es/anunezca/ayudas/logaritmos/logaritmos.htm>

[Curso de logaritmos, con ejemplos resueltos:](#)

[http://www.unizar.es/aragon\\_tres/unidad1/u1logreto.pdf](http://www.unizar.es/aragon_tres/unidad1/u1logreto.pdf)

## AUTOEVALUACIÓN

1.- Calcula sin utilizar calculadora el valor de los siguientes logaritmos:

$$\log_2 256$$

Opción A	Opción B	Opción C
4	8	16

$$\log_9 243$$

Opción A	Opción B	Opción C
9	5/2	1/3

2.- Calcula el valor de las expresiones siguientes sin utilizar calculadora:

$$\log_2 \sqrt[4]{8}$$

Opción A	Opción B	Opción C
1/2	2	3/4

$$\log_4 \frac{16}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{4^3}}$$

Opción A	Opción B	Opción C
5/6	4/6	7/6

### Para saber más

En el siguiente documento puedes ver algunas aplicaciones de los logaritmos en la vida diaria:

Logaritmos:

<http://matematicaspdf1.blogspot.com.es/2012/04/aplicaciones-de-los-logaritmos-en-la.html>

## 1.6.- Números irracionales y reales

Hemos visto que los números racionales  $\frac{a}{b}$  equivalen a los números decimales finitos o periódicos (puros o mixtos). Sin embargo es fácil ver que existen números decimales con **infinitas cifras decimales** que **no son periódicas**:

$$x = 0'1234567891011121314151617.....$$

Las cifras decimales de este número no se repiten, ya que se corresponden con la sucesión de números naturales, que aumenta de manera indefinida.

Este tipo de números no pueden ser racionales, es decir, **no se pueden expresar** mediante una fracción de números enteros.

**Un número irracional es un número decimal con infinitas cifras decimales no periódicas. Se representa con la letra I**

Existen infinidad de números irracionales; de hecho, son infinitamente más numerosos que los números racionales. Por ejemplo:

· todas las raíces (de cualquier índice) no enteras son números irracionales:

$$\sqrt{2} \quad \sqrt{3} \quad \sqrt{5} \dots \sqrt[3]{2} \dots etc$$

el número  $\pi$ , que es la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro

$$\pi = 3'14159265.....$$

· el número  $e$ , base de los logaritmos naturales:  $e = 2'178281828.....$

· el número áureo  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  llamado el coeficiente de la belleza

Dado cualquier número  $x$ , podemos afirmar que  $x$  es **racional** (natural, entero o decimal finito o periódico), cuando se puede expresar a través de una fracción de números enteros, o bien  $x$  es **irracional**, si tiene infinitas cifras decimales no periódicas y en consecuencia, no se puede expresar como una fracción de números enteros.

Para saber más sobre números irracionales:

[Definición e historia de los conjuntos numéricos:](#)

[http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero\\_irracional](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_irracional)

[Historia y justificación de los números irracionales:](#)

<http://platea.pntic.mec.es/~bgarcia/irracinl.htm>

[Interpretación geométrica de los números irracionales:](#)

[http://www.kalipedia.com/matematicas-geometria/tema/numeros-rationales-irracionales.html?x=20070926klpmatari\\_158.Kes](http://www.kalipedia.com/matematicas-geometria/tema/numeros-rationales-irracionales.html?x=20070926klpmatari_158.Kes)

Todo lo anterior nos permite definir un nuevo conjunto de números más amplio que engloba a todos los anteriores:

**El conjunto de los números reales es la unión de los racionales junto con los irracionales. Se representa con el símbolo  $\mathbb{R}$**

[Para saber más sobre números reales:](#)

[Definición e historia de los números reales:](#)

[http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero\\_real](http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_real)

[Los conjuntos numéricos desde los naturales a los reales:](#)

[http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Reales/marco\\_reales.htm](http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Reales/marco_reales.htm)

[Clasificación de números reales:](#)

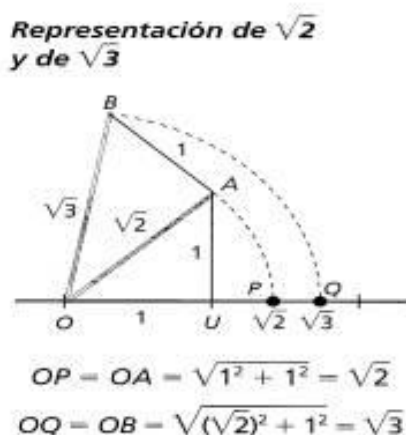
<http://www.telefonica.net/web2/lasmatematicasdemario/Aritmetica/Numeros/Numreal.htm>

[Curso muy completo sobre números y aritmética básica:](#)

<http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Reales/reales.htm>

## 1.7.- Representación de números reales. Recta real

Algunos números irracionales tienen una forma geométrica de representarse, aplicando el Teorema de Pitágoras:



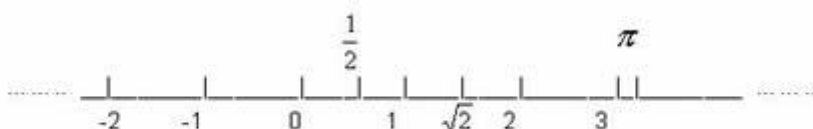
Repitiendo el método, podríamos construir la  $\sqrt{4} = 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ , etc.

Si consideramos un número real  $x$  dado por su expresión decimal, por ejemplo,

$x = 5'635784.....$  lo podríamos expresar:

- mediante una sucesión de números decimales por defecto que se aproximan al valor  $x$ , tomando en cada paso una cifra más de la expresión de  $x$ : 5, 5'6, 5'63, 5'635, 5'6357,.....
- mediante una sucesión de números decimales que lo aproximan por exceso: 6, 5'7, 5'64, 5'636, 5'6358, .....
- mediante una sucesión de intervalos encajados que aproximen cada vez más al valor  $x$ : [5, 6], [5'6, 5'7], [5'63, 5'64], [5'635, 5'636], [5'6357, 5'6358] ....

Al representar sobre una recta el conjunto de los números racionales junto con los irracionales, obtenemos la *recta real*  $\mathbb{R}$ , en la que cada punto representa un número, racional o irracional y a cada número real le corresponde un único punto de la recta.



Para saber más:

[Sobre la representación de números reales sobre la recta:](http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/representar_irracionales_sgn/irracionales_index.htm)

[http://descartes.cnice.mec.es/materiales\\_didacticos/representar\\_irracionales\\_sgn/irracionales\\_index.htm](http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/representar_irracionales_sgn/irracionales_index.htm)

## 1.8.- Expresión decimal de los números racionales

Todo número racional en forma de fracción de enteros es una división desde el punto de vista numérico.

Así, si tomamos un número racional y hacemos la división entre su numerador y denominador, obtenemos la llamada **expresión decimal del número racional**.

Por ejemplo, para  $\frac{5}{4}$  se obtiene 1,25 y lo expresamos de la forma  $\frac{5}{4} = 1,25$

Cuando hacemos la división para encontrar la expresión decimal de un número racional, podemos encontrarnos con tres posibilidades o casos:

**Caso 1:** Hacemos la división y obtenemos una expresión decimal exacta o finita como la de  $\frac{5}{4}$ .

Se dice en este caso que el número racional es **decimal exacto o con expresión decimal finita**.

**Caso 2:** Si buscamos la expresión decimal de  $\frac{2}{3}$ , observamos que la división no tiene fin y que siempre sale la misma cifra en la parte decimal (esa parte que se repite no tiene porque ser una sola cifra como veremos más adelante), lo expresamos con la ayuda de puntos suspensivos

$$\frac{2}{3} = 0,66666666\dots$$

y para abreviar se utiliza un gorrito en la parte superior de la(s) cifra(s) que se repite(n) como ves a continuación en nuestro ejemplo

$$\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$$

En este caso decimos que el número racional es **periódico puro**.

**Caso 3:** Finalmente puede ocurrir que al hacer la división nos encontremos que en la parte decimal del número haya una parte que no se repite y a continuación una o varias cifras que se repiten sin fin.

Este es el caso de

$$\frac{37}{30} = 1,23333333\dots$$

Si seguimos la misma notación que en el caso anterior escribimos

$$\frac{37}{30} = 1,2\overline{3}$$

y se dice que el número racional es **decimal periódico mixto**.

**Resumiendo:**

**Cada número racional, en forma de fracción de números enteros, tiene una expresión decimal que puede ser:**

- a) Decimal exacto o finito.**
- b) Decimal periódico puro.**
- c) Decimal periódico mixto.**

Algunos ejemplos más:

$$\frac{15}{9} = 1,\bar{6}$$

$$\frac{359}{100} = 3,59$$

$$\frac{48}{8} = 6$$

$$\frac{38}{15} = 2,5\bar{3}$$

La correspondencia entre un número fraccionario y su expresión decimal equivalente es biunívoca, puesto que si tenemos el número racional dado a través de su expresión decimal (la que sea de las tres) también se puede encontrar su forma fraccionaria irreducible.

Parece que con los números racionales se puede medir cualquier magnitud, longitudes, masas, temperaturas, etc. En el apartado siguiente verás que los números racionales son insuficientes para cuantificar cualquier magnitud. Esto nos llevará a una nueva ampliación de nuestro campo numérico a otro conjunto más amplio que se denominará **Conjunto de los números reales**.

## 1.9.- Aproximaciones y errores

En la práctica, no se puede trabajar con cantidades que tengan infinitas cifras decimales, ya que ni siquiera se pueden escribir y mucho menos realizar cálculos exactos con ellas. En su lugar tomamos **aproximaciones** a dichas cantidades, que simplifican los cálculos.

**Dado un número real  $x$ , una aproximación es un valor  $a$  cercano a  $x$ . Si  $a > x$  la aproximación es por exceso y si  $a < x$  la aproximación es por defecto.**

Generalmente, la aproximación  $a$  es un número decimal finito y cercano (en algún sentido) al valor  $x$ . Existen 2 métodos fundamentales para aproximar una cantidad. En ambos casos, debemos indicar la cifra a la que queremos aproximar:

- **Redondeo:** para redondear una cantidad a la  $n$ -ésima cifra, nos fijaremos en la siguiente cifra. Si ésta es mayor o igual que 5, aumentamos en una unidad la cifra  $n$ -ésima. En otro caso, dejamos tal y como está la cifra  $n$ -ésima y despreciamos las demás cifras a partir de ella.
- **Truncamiento:** para truncar una cantidad a la cifra  $n$ -ésima, se prescinde directamente de las siguientes cifras a partir de ella. Este método siempre produce aproximaciones por defecto, es decir, **menores que** la cantidad exacta  $x$  que queremos aproximar.

**Ejemplos:**

redondear  $x = 5'897845\dots$  a las milésimas (3ª cifra decimal)  $\rightarrow = 5'898$

redondear  $x = 2'6993\dots$  a las centésimas (2ª cifra decimal)  $\rightarrow = 2'70$

truncar  $x = -45'789657\dots$  a las diezmilésimas (4ª cifra)  $\rightarrow = -45'7896$

**El error absoluto E de una aproximación es el valor absoluto de la diferencia (diferencia en positivo) entre la cantidad exacta x y la aproximación a:**

$$E = |x - a|$$

A menudo, no se puede calcular directamente, ya que es imposible realizar la diferencia  $x - a$  debido a que  $x$  es una cantidad decimal con infinitas cifras. Entonces, se suficiente tomar una **cota del error**, que dependerá de la precisión de la aproximación:

$$x = \frac{2}{7} = 0,2857142 \rightarrow \text{aproximar por redondeo a las centésimas: } a = 0,29$$

$$E = \left| \frac{2}{7} - 0,29 \right| = |0,2857142 - 0,29| = |-0.004285714| < 0,005$$

podemos afirmar que la aproximación tiene un **error menor que 5 milésimas**

**El error relativo  $e_r$  de una aproximación es el cociente entre el error absoluto y la cantidad exacta x que queremos aproximar:**

$$e_r = \frac{E}{x}$$

Este coeficiente mide el error absoluto cometido en relación con el valor exacto de la cantidad que estamos midiendo. Se suele expresar en % multiplicándola por 100  $\rightarrow$  **error porcentual**. Conforme aumentamos la precisión, va decreciendo el error relativo o porcentual. Este concepto permite comparar dos aproximaciones distintas entre sí, de forma que será mejor aproximación la que tenga menor error relativo.

### Autoevaluación

1.- Establece una aproximación por redondeo a las milésimas y otra por truncamiento a la diez milésima de los números:

$3'153\bar{6}$

	Opción A	Opción B
Redondeo	3,142	3,154
Truncamiento	3,1415	3,1536

$\pi = 3'14159265\dots$

	Opción A	Opción B
Redondeo	3,142	3,154
Truncamiento	3,1415	3,1536

2.- Cuando aproximamos  $\sqrt{5} = 2,2360679$  por el número decimal finito  $2'236$ , ¿qué cota de error cometemos?.

Error  $E <$



$3'568 \cdot 10^{-16} \rightarrow 3.568 \text{ [EXP] } \pm 16$

**Para saber más sobre notación científica**

Teoría y ejemplos de operaciones en notación científica:

<http://es.scribd.com/doc/56993/Notacion-Cientifica-3-1>

Documento muy completo sobre notación científica:

[http://www.asifunciona.com/ciencia/ke\\_notacion\\_cientifica/ke\\_notacion\\_cientifica\\_1.htm](http://www.asifunciona.com/ciencia/ke_notacion_cientifica/ke_notacion_cientifica_1.htm)

Ejemplo de uso para calculadora en notación científica:

<http://www.ctv.es/USERS/vaello/manual/c-cientifica.htm>



## TAREA 1.2.

1. Calcula el valor de los radicales siguientes:

a)  $-\sqrt{729}$     b)  $\sqrt[5]{1024}$     c)  $\sqrt[4]{1296}$     d)  $\sqrt[5]{-16807}$     e)  $\sqrt[3]{-512}$

2. Efectúa las operaciones siguientes y expresa el resultado de la forma más simplificada posible:

a)  $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}$     b)  $3^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{3^3}$     c)  $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[9]{a^5}$     d)  $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2^3}}$   
e)  $\sqrt[6]{x^5} \cdot \sqrt[5]{x^3} \cdot \sqrt[10]{x}$     f)  $\sqrt[6]{a^5 b^7} \cdot \sqrt[3]{ab^2}$     g)  $\sqrt{5} + \sqrt{20}$     h)  $\sqrt[3]{24} - 5\sqrt[3]{3}$

3. Calcula el valor de los logaritmos siguientes:

a)  $\log_2 \left( \frac{1}{32} \right)$     b)  $\log_{\frac{1}{2}} 32$     c)  $\log_3 \sqrt[4]{27}$   
d)  $\log_4 \left( \frac{4}{\sqrt[5]{4}} \right)$     e)  $\log \sqrt[5]{10^{-3}}$     f)  $\log \sqrt[4]{\frac{1}{10^{-8}}}$

4. Sabiendo que  $\log 2 = 0,301$  y que  $\log 3 = 0,477$ , utiliza las propiedades de los logaritmos para calcular el valor aproximado de:

a)  $\log 6$     b)  $\log \frac{5}{2}$     c)  $\log \sqrt{24}$     d)  $\log \sqrt[3]{12}$

5. Resuelve las ecuaciones siguientes y utiliza la calculadora para dar un valor aproximado de la solución:

a)  $5^x = 30$     b)  $2^{x+1} = 7$     c)  $3^{2x} = 58$

## EJERCICIOS EXÁMENES AÑOS ANTERIORES

### **Junio 2008**

La masa de un electrón es de  $9'11 \cdot 10^{-28}$  g. y la masa de la Tierra es de  $5'98 \cdot 10^{27}$  g.

- a) Si toda la materia estuviera hecha de electrones ¿cuántos necesitaríamos para obtener 1000 T. de materia? (1 T. =  $10^6$  g.)

Si la Tierra estuviera hecha de electrones, ¿cuántos habría?

### **Junio 2009 (e-learning)**

1. Tres socios invierten sus ahorros en un negocio de la forma siguiente: el primero aporta  $\frac{1}{3}$  del capital, el segundo aporta  $\frac{2}{5}$  del capital y el tercero el resto. Al cabo de 5 meses reparten unos beneficios de 450000 €. ¿Qué beneficios recibe el tercer socio?

### **Septiembre 2009 (e-learning)**

2. De un tonel sacamos  $\frac{1}{3}$  de su contenido, después la cuarta parte de lo que queda y el resto es de 200 litros. ¿Cuál era su capacidad?

### **Febrero 2011 (e-learning)**

1. Un depósito de agua está lleno una tercera parte de su capacidad. Con las últimas lluvias se ha llenado la cuarta parte de lo que quedaba vacío. Si en total hay 30 litros, ¿cuál es la capacidad del depósito?
2. Tres socios invierten sus ahorros en un negocio de la forma siguiente: el primero aporta  $\frac{1}{3}$  del capital, el segundo aporta  $\frac{2}{5}$  del capital y el tercero el resto. Al cabo de 5 meses reparten unos beneficios de 450000 €. ¿Qué beneficios recibe el tercer socio?

### **Septiembre 2013**

$$\frac{1 + \frac{1 + \frac{1}{2}}{2}}{1 - \frac{1 - \frac{1}{3}}{3}} =$$